

## La cometa di Goldbach e ... le altre

Donato SAELI and Maurizio SPANO

**Abstract**<sup>1</sup>. Goldbach's comet is the plot of the Goldbach function  $g(n)$ , in the interval  $[3, N]$ , with a large positive integer  $N$ . The function  $g(n)$  counts the number of different ways in which  $2n$  can be expressed as the sum of two odd primes. An account, hopefully satisfying and accessible, is given for the layers that make up the comet. By means of several (sometimes historical) results of Theory of Numbers, other conjectures, similar to the Goldbach's one, emerge. These are related with sequences of odd positive integers, like but not quite to the prime sequence.

### 1. LA COMETA DI GOLDBACH

Il grafico della funzione aritmetica  $g(n)$  che associa ad  $n$  il numero delle coppie  $(p, q)$  di numeri primi dispari tali che  $p + q = 2n$ , considerata nell'intervallo  $[3, N]$ , con  $N$  sufficientemente grande, appare curiosamente come una cometa (fig. 1) e prende giustappunto il nome di “*cometa di Goldbach*”; tale nome deriva dal fatto che l'affermazione “ $g(n) > 0$  per ogni  $n > 2$ ” è equivalente alla congettura di Gold-

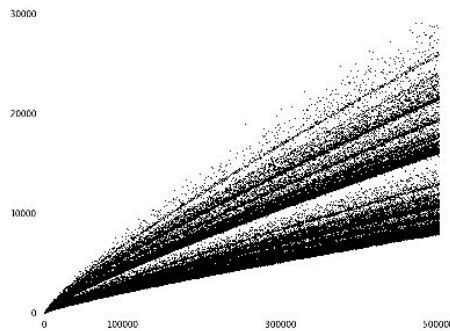


FIGURA 1. Grafico di  $g(n)$ , per  $n \in [3, 500.000]$ .

---

<sup>1</sup>Authors' address: D. Saeli, Università degli Studi della Basilicata, Dipartimento di Matematica e Informatica, Via dell'Ateneo Lucano 10, 85100 Potenza, Italy;  
e-mail: [donato.saeli@unibas.it](mailto:donato.saeli@unibas.it).

M. Spano, Via Rocco Scotellaro 19, 75019 Tricarico (Matera), Italy.

*Keywords.* Goldbach's comet, function, conjecture, extended conjecture, Sylvester factor. Prime number theorem, PNT for arithmetic progressions, asymptotic expression for the  $n$ th prime.  
*AMS Subject Classification.* 11P32.

bach<sup>2</sup>:

“Ogni numero pari non inferiore a quattro è somma di due primi”.

Un particolare che si nota in fig. 1 è la “striatura della cometa”; si distinguono chiaramente due zone principali a loro volta divise in più striscie.

Di questa particolarità del grafico della  $g(n)$ , vogliamo dare una giustificazione che speriamo sia soddisfacente e accessibile.

Naturalmente pietra miliare di ogni discussione su questi argomenti rimane la “Congettura A”, detta anche congettura “*estesa*” di Goldbach [13], formulata nel 1922 da Hardy e Littlewood:

$$g(n) \sim h(n) = \frac{4cn}{(\lg n)^2} \prod_{\substack{p|n \\ p \geq 3}} \frac{p-1}{p-2},$$

dove<sup>3</sup>  $c = \prod_{p \geq 3} p(p-2)/(p-1)^2$ . La funzione  $h(n)$ , il cui grafico (fig. 2) somiglia alla cometa di Goldbach (ne pare la “bella copia”), è prodotto della funzione “tranquilla”  $4cn/(\lg n)^2$  (che, come si può vedere, limita il bordo inferiore delle comete) per il fattore  $\prod_{p \geq 3, p|n} (p-1)/(p-2)$  che dipende piuttosto “vivacemente” da  $n$  e può essere relativamente grande se  $n$  ha parecchi fattori primi piccoli; <sup>4</sup> ad esempio vale  $3,5$  per  $n = 2310 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$ , ma meno di  $1,0004331$  per il numero primo  $n = 2311$ . D'altra parte è possibile mostrare l'importanza di questo fattore nella congettura A, contraendo la cometa di Goldbach in una stretta scia; basta considerare la funzione

$$G(n) = g(n) \prod_{\substack{p|n \\ p \geq 3}} \frac{p-2}{p-1}$$

<sup>2</sup>La congettura risale al 1742 (cfr. [7], p. 421) e appare tuttora aperta, sebbene parecchi studiosi abbiano conseguito risultati considerevoli (cfr. ad es. [21], [10], [4] e [15]).

<sup>3</sup>La scrittura  $g(n) \sim h(n)$  indica che  $\lim_{n \rightarrow \infty} g(n)/h(n) = 1$  e si dice che le due funzioni sono *asintoticamente equivalenti* (per  $n \rightarrow \infty$ ). Il prodotto

$$\prod_{\substack{p|n \\ p \geq 3}} \frac{p-1}{p-2}$$

s'intende esteso a tutti i numeri primi dispari che dividono  $n$  e si pone uguale a 1 se è privo di fattori, cioè se  $n = 2^k$ . L'espressione che determina la costante  $c$  è un “*prodotto infinito*” esteso a tutti i primi dispari, più precisamente:

$$c = \prod_{p \geq 3} \frac{p(p-2)}{(p-1)^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \prod_{3 \leq p \leq n} \frac{p(p-2)}{(p-1)^2} \right) = 0,6601618\dots$$

Un risultato prossimo alla Congettura A era stato annunciato da Sylvester [18] nel 1871, che aveva proposto una formula equivalente alla  $g(n) \sim 2e^{-\gamma}h(n)$ ; ma la Congettura A “... è la sola formula di questa sorta che può essere corretta, cosicché la formula di Sylvester è errata. Ma Sylvester è stato il primo ad identificare il fattore

$$\prod_{\substack{p|n \\ p \geq 3}} \frac{p-1}{p-2}$$

a cui sono dovute le *irregolarità* della  $h(n)$ . Non vi sono indicazioni sufficienti per mostrare come sia stato condotto al suo risultato. ...” ([13], pp. 32, 33).

<sup>4</sup>Il prodotto infinito  $\prod_{p \geq 3} (p-1)/(p-2)$  esteso a tutti i primi dispari diverge a  $+\infty$ .

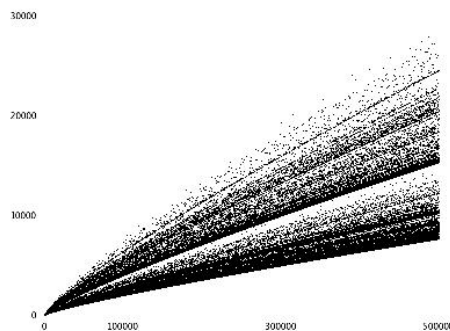


FIGURA 2. Grafico di  $h(n)$ , per  $n \in [3, 500.000]$ .

in luogo della  $g(n)$ , cosicché la congettura A assume la forma:

$$G(n) \sim \frac{4cn}{(\lg n)^2}$$

ed infatti (fig. 3) il grafico della  $G(n)$ , la “scia,” si “adagia” sul grafico della  $4cn/(\lg n)^2$ .

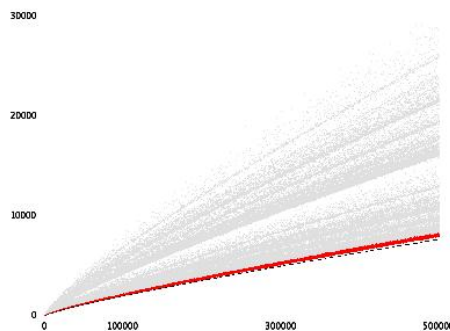


FIGURA 3. Grafici delle funzioni  $G(n)$  e  $4cn/(\lg n)^2$  per  $n \in [3, 500.000]$ .

## 2. LA COMETA DI GOLDBACH A COLORI

Vi sono due aspetti, propri della distribuzione dei numeri primi fra i numeri naturali, che incidono profondamente sulla natura della funzione  $g(n)$ , il *teorema dei numeri primi* (Hadamard, de la Vallée-Poussin):

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\pi(x)}{\frac{x}{\lg x}} = 1,$$

dove  $\pi(x)$  associa a  $x$  il numero dei primi che non superano  $x$ ; l'altro consiste nell'estensione data da de la Vallée-Poussin al teorema di Dirichlet sui *primi in*

*progressione aritmetica:*

Se  $m$  ed  $a$  sono due numeri naturali primi fra loro, allora

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\pi_{m,a}(x)}{\frac{\varphi(m) \lg x}{x}} = 1,$$

dove  $\pi_{m,a}(x)$  associa a  $x$  il numero dei primi della forma  $a + km$  che non superano  $x$  e  $\varphi(m) = \#\{h \in \mathbb{N} : 1 \leq h < m \text{ e } (h, m) = 1\}$  è “l’indicatore” di Eulero; se  $(m, a) > 1$ , fra i numeri della forma  $a + km$ , uno al più può essere primo.

Naturalmente è possibile e conveniente riformulare quest’ultimo teorema nei termini dell’aritmetica modulare:

Nell’anello  $\mathbb{Z}_m$  delle classi di resto modulo  $m$ , una classe  $\bar{a}$  contiene infiniti numeri primi se e solo se è una classe prima col modulo  $m$ , cioè se e solo se  $(a, m) = 1$ ; inoltre, se  $\bar{a}$  e  $\bar{b}$  sono due classi prime col modulo  $m$ , allora

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\pi_{m,a}(x)}{\pi_{m,b}(x)} = 1.$$

Infine una classe non prima col modulo  $m$  può contenere al più un solo numero primo.

Se  $\bar{a} \in \mathbb{Z}_m$ , si dice “divisore” della classe  $\bar{a}$  e si indica con  $\text{div}(\bar{a})$  il massimo comun divisore  $(a, m)$  fra  $a$  e il modulo  $m$ ; si noti che se  $a' \in \bar{a}$  è  $(a', m) = (a, m)$ . Così  $\bar{a}$  contiene infiniti numeri primi se e solo se il suo divisore è 1.

È chiaro che se il modulo  $m$  è pari e  $\bar{a}$  e  $\bar{b}$  sono due classi prime con  $m$ , allora la classe  $\bar{a} + \bar{b} = \overline{a + b}$  contiene solo numeri pari, vale a dire è una “classe pari”; recentemente [8] è stato mostrato che ogni classe pari si può esprimere come somma di due classi prime e anche come determinare il numero di tali rappresentazioni. Più precisamente ([18], pp. 2261-2263), indicato con  $\mathbb{Z}_m^*$  l’insieme (gruppo) delle classi prime con  $m$ , se  $\bar{c} \in \mathbb{Z}_m$  (in generale) si ha:

$$\sigma_m(c) = \#\{(\bar{a}, \bar{b}) \in (\mathbb{Z}_m^*)^2 : \bar{a} + \bar{b} = \bar{c}\} = m \prod_{\substack{p|m \\ p|c}} \left(1 - \frac{1}{p}\right) \prod_{\substack{p|m \\ p \nmid c}} \left(1 - \frac{2}{p}\right),$$

ma se si sceglie come modulo il prodotto dei primi  $h$  numeri primi, cioè  $m = 2 \cdot 3 \cdots p_h$  e se  $d = \text{div}(\bar{c}) = (c, m)$ , si vede facilmente che

$$(1) \quad \sigma_m(c) = \sigma_m(d) = m \prod_{p|d} \left(1 - \frac{1}{p}\right) \prod_{p|\frac{m}{d}} \left(1 - \frac{2}{p}\right);$$

così, per questo tipo particolare di modulo,  $\sigma_m(c)$  dipende solo dal divisore della classe cui appartiene  $c$ . Ma l’insieme dei possibili divisori per le classi pari di  $\mathbb{Z}_m$ , cioè l’insieme dei divisori pari (e positivi)  $d$  di  $m$ , è costituito dai numeri  $d = 2 \cdot 3^{\alpha_2} \cdots p_h^{\alpha_h}$ , per tutte le possibili scelte di  $\alpha_i$  su 0 o 1, per  $i = 2, \dots, h$ ; ne segue che

$$\sigma_m(d) = \sigma_m(2 \cdot 3^{\alpha_2} \cdots p_h^{\alpha_h}) = \prod_{i=2}^h (p_i - 1)^{\alpha_i} (p_i - 2)^{1 - \alpha_i}$$

in particolare  $\sigma_m(2) = \prod_{i=2}^h (p_i - 2)$ ; si noti che 2 è l’unico divisore di  $m$  per cui  $\sigma_m$  risulta dispari, inoltre, per  $d$  pari, è  $\sigma_m(2) \leq \sigma_m(d)$ . Indicata con  $\{p_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  la successione dei numeri primi in ordine crescente ( $p_1 = 2$ ), sia  $N$  un numero naturale sufficientemente grande; se  $k$  è l’indice tale che  $p_k \leq N < p_{k+1}$ , si assuma

come modulo  $m = 2 \cdot 3 \cdots p_k$ . Si consideri ora un qualunque numero naturale  $n$ ,  $3 \leq n \leq N$ , si ha:

$$d = (2n, m) = 2 \cdot 3^{\beta_2} \cdots p_k^{\beta_k}, \quad \text{con } \beta_i = \begin{cases} 1 & \text{se } p_i | n \\ 0 & \text{se } p_i \nmid n \end{cases} \quad \text{per } i = 2, \dots, k,$$

$$\sigma_m(2n) = \sigma_m(d) = \prod_{i=2}^k (p_i - 1)^{\beta_i} (p_i - 2)^{1-\beta_i};$$

e finalmente si trova

$$\frac{\sigma_m(2n)}{\sigma_m(2)} = \frac{\prod_{i=2}^k (p_i - 1)^{\beta_i} (p_i - 2)^{1-\beta_i}}{\prod_{i=2}^k (p_i - 2)} = \prod_{i=2}^k \left( \frac{p_i - 1}{p_i - 2} \right)^{\beta_i} = \prod_{\substack{p | n \\ p \geq 3}} \frac{p - 1}{p - 2},$$

il fattore di Sylvester.

Per vedere cosa c'entra tutto ciò con i colori della cometa di Goldbach occorre esaminare alcuni casi relativi a valori particolari (successivi) del modulo  $m$ .

*i)* Per  $m = 6$  i numeri pari si distribuiscono nelle classi (pari)  $\bar{0}$ ,  $\bar{2}$  e  $\bar{4}$  con  $\text{div}(\bar{0}) = 6$  e  $\text{div}(\bar{2}) = \text{div}(\bar{4}) = 2$ , mentre i numeri primi, tranne 2 e 3, si vanno a collocare nelle due classi prime  $\bar{1}$  e  $\bar{5}$ .

$$\text{Si ha:} \quad \bar{0} = \bar{1} + \bar{5} = \bar{5} + \bar{1}, \quad \bar{2} = \bar{1} + \bar{1} \quad \text{e} \quad \bar{4} = \bar{5} + \bar{5};$$

in accordo con la (1), ritenendo distinte le due espressioni  $\bar{1} + \bar{5}$  e  $\bar{5} + \bar{1}$  per la classe  $\bar{0}$ ; questa distinzione torna utile se si valutano le possibilità di esprimere un determinato pari come somma di due primi appartenenti a una stessa classe oppure a due classi diverse. Infatti, fissato  $h \in \mathbb{N}$ , si ha:

$$\begin{aligned} 6h - 2 &= 5 + [6(h - 2) + 5] = 11 + [6(h - 3) + 5] = 17 + [6(h - 4) + 5] = \cdots = \\ &= [6(h - 4) + 5] + 17 = [6(h - 3) + 5] + 11 = [6(h - 2) + 5] + 5, \\ 6h &= 7 + [6(h - 2) + 5] = 13 + [6(h - 3) + 5] = 19 + [6(h - 4) + 5] = \cdots = \\ &= [6(h - 3) + 1] + 17 = [6(h - 2) + 1] + 11 = [6(h - 1) + 1] + 5 \\ 6h + 2 &= 7 + [6(h - 1) + 1] = 13 + [6(h - 2) + 1] = 19 + [6(h - 3) + 1] = \cdots = \\ &= [6(h - 3) + 1] + 19 = [6(h - 2) + 1] + 13 = [6(h - 1) + 1] + 7; \end{aligned}$$

si nota facilmente che mentre i numeri pari della forma  $6h$  si esprimono in  $h - 1$  modi diversi come somma di due addendi appartenenti rispettivamente alle classi  $\bar{1}$  e  $\bar{5}$ , i pari della forma  $6h - 2$ ,  $(6h + 2)$  si possono esprimere, a meno dell'ordine, solo in  $\lfloor h/2 \rfloor$  modi diversi come somma di due addendi entrambi appartenenti necessariamente alla classe  $\bar{5}$  ( $\bar{1}$ ). Così i numeri pari appartenenti alla classe  $\bar{0}$ , rispetto ai numeri pari delle classi  $\bar{2}$  e  $\bar{4}$ , hanno circa il doppio di possibilità di rappresentazioni diverse come somma di due primi dispari<sup>5</sup>.

Queste considerazioni suggeriscono come "*colorare la cometa di Goldbach.*" Occorre semplicemente segnare, nell'illustrazione del grafico della  $g(n)$ , ad esempio, in nero i punti corrispondenti ai valori di  $n$  per i quali  $(2n, 6) = 2$  e in rosso gli altri; il

<sup>5</sup>Naturalmente sono state trascurate le possibilità  $6h - 2 = 3 + [6(h - 1) + 1]$  e  $6h + 2 = 3 + [6(h - 1) + 5]$ .

risultato (fig. 4) pone in evidenza ancora di più le due zone principali.

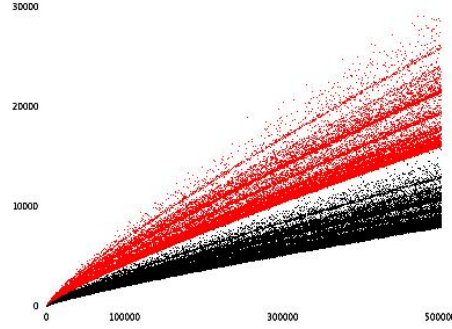


FIGURA 4. Grafico di  $g(n)$ , per  $n \in [3, 500.000]$ . In nero i punti con  $(2n, 6) = 2$ , in rosso i punti con  $(2n, 6) = 6$ .

*ii*) Per  $m = 30$ , vi sono otto classi prime:  $\bar{1}, \bar{7}, \bar{11}, \bar{13}, \bar{17}, \bar{19}, \bar{23}, \bar{29}$  e quattro possibili divisori  $d$  per le classi pari: 2, 6, 10, 30 cui corrispondono, per la (1), i rispettivi valori 3, 6, 4, 8 di  $\sigma_{30}(d)$ . Si può vedere facilmente che le classi  $\bar{2}, \bar{4}, \bar{8}, \bar{14}, \bar{16}, \bar{22}, \bar{26}, \bar{28}$  hanno tutte divisore 2 e per queste classi  $\sigma_{30}(2) = 3$ ; infatti:  $\bar{2} = \bar{1} + \bar{1} = \bar{13} + \bar{19} = \bar{19} + \bar{13}, \bar{4} = \bar{11} + \bar{23} = \bar{17} + \bar{17} = \bar{23} + \bar{11}, \dots, \bar{28} = \bar{11} + \bar{17} = \bar{17} + \bar{11} = \bar{29} + \bar{29}$ .

Le classi  $\bar{6}, \bar{12}, \bar{18}, \bar{24}$  hanno divisore 6 e si ha:  $\sigma_{30}(6) = 6$ . Le classi  $\bar{10}, \bar{20}$  hanno divisore 10 e  $\sigma_{30}(10) = 4$ . Infine la classe  $\bar{0}$  ha divisore 30 e  $\sigma_{30}(30) = 8$ .

Così ai quattro divisori pari di 30 corrispondono altrettante zone nel grafico della  $g(n)$  (fig. 5), le due zone principali vengono divise ciascuna in due strati.

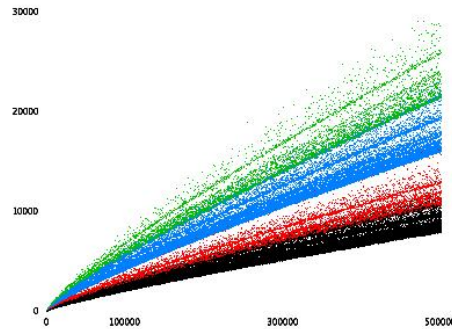


FIGURA 5. Grafico di  $g(n)$ , per  $n \in [3, 500.000]$ . In nero i punti con  $(2n, 30) = 2$ , in rosso i punti con  $(2n, 30) = 10$ , in blu i punti con  $(2n, 30) = 6$ , in verde i punti con  $(2n, 30) = 30$ .

*iii*) Per  $m = 210$ , vi sono quarantotto classi prime e otto possibili divisori  $d$  per le classi pari, si ha:

$d$	2	6	10	14	30	42	70	210
$\sigma_m(d)$	15	30	20	18	40	36	24	48

ai divisori pari di 30 corrispondono otto zone nel grafico della  $g(n)$  (fig. 6).

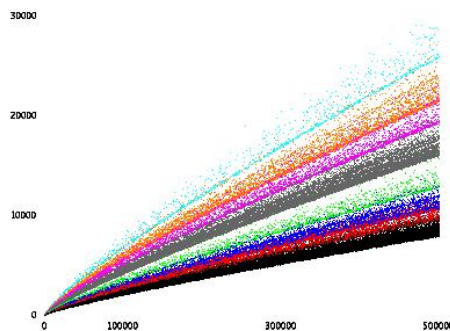


FIGURA 6. Grafico di  $g(n)$ , per  $n \in [3, 500.000]$ . Rispettivamente in nero, rosso, blu, verde, grigio, violetto, arancione, ciano i punti con  $(2n, 210) = 2, 14, 10, 70, 6, 42, 30, 210$ .

*iv)* Per  $m = 2310$ , vi sono 480 classi prime e 16 possibili divisori  $d$  per le classi pari e si ha:

$d$	2	6	10	14	22	30	42	66	70	110
$\sigma_m(d)$	135	270	<u>180</u>	162	150	<u>360</u>	324	300	216	200
$d$	154	210	330	462	770	2310				
$\sigma_m(d)$	<u>180</u>	432	400	<u>360</u>	240	480				

Si nota che  $\sigma_{2310}(10) = \sigma_{2310}(154) = 180$  e  $\sigma_{2310}(30) = \sigma_{2310}(462) = 360$ ; così i divisori pari di  $m = 2310$  sono 16, ma le strisce che in questo caso si possono distinguere con i colori nel grafico della  $g(n)$  sono di meno, solo 14 (fig. 7). Ovviamente per tutti i moduli  $m = 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot p_h$  con  $h \geq 5$  la  $\sigma_m$  ristretta all'insieme dei divisori positivi pari di  $m$  non può essere iniettiva.

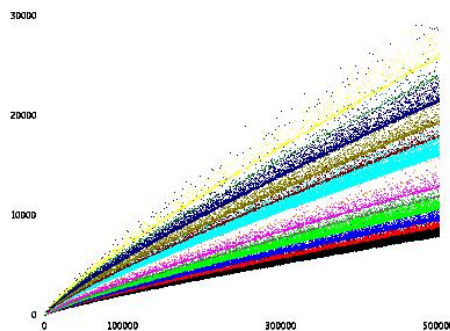


FIGURA 7. Grafico di  $g(n)$ , per  $n \in [3, 500.000]$ , 14 colori,  $m = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 = 2310$ .

## 3. LE ALTRE

Un'analisi ampia e mirata, anche se di natura prevalentemente empirica, ha suscitato in chi scrive la convinzione che la validità della congettura di Goldbach sarebbe eventualmente causata solo dal “*tipo di collocazione dei primi fra i naturali*” e da nessun'altra loro proprietà intrinseca. A sostegno di questa convinzione vengono descritte alcune successioni di numeri dispari, sostanzialmente diverse dalla successione dei primi, ma che in un certo senso, presentano lo stesso “*tipo*” di distribuzione fra i naturali e naturalmente la potenzialità di soddisfare l'enunciato analogo alla congettura di Goldbach. È necessario premettere qualche definizione.

Data una successione di numeri dispari  $\tau = \{r_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ , monotona crescente, si indicherà con  $g_\tau(n)$  e si dirà “*funzione di Goldbach correlata alla successione  $\tau$* ,” la funzione aritmetica che associa ad  $n$  il numero delle coppie  $(r_i, r_j)$  tali che  $r_i + r_j = 2n$ , si dirà poi “*analogo della congettura di Goldbach per la successione  $\tau$* ” l'enunciato: “*vi è un  $m_\tau \in \mathbb{N}$  tale che  $g_\tau(n) > 0$  per ogni  $n > m_\tau$* ”.

Si indicherà infine con  $\pi_\tau(x)$  il numero degli elementi della successione  $\tau$  che non superano  $x$ .

a) Si consideri la successione di numeri dispari  $\tau = \{r_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  definita come segue:

$$\begin{cases} r_1 = p_2 & (p_2 = 3), \\ r_i = p_i + 2 & \text{per } i > 1, \end{cases}$$

è facile vedere che  $g(n) \leq g_\tau(n+2) \leq g(n) + 2$  per ogni  $n > 2$ ; ma gli elementi della  $\tau$  sono “*quasi*” tutti composti (per una “buona metà” sono addirittura multipli di 3 e i primi che vi figurano sono le seconde componenti delle coppie di primi gemelli). Per  $N$  sufficientemente grande, il grafico della  $g_\tau(n)$  in  $[3, N]$ , sebbene diverso, sembra proprio la cometa di Goldbach.

Una successione analoga alla precedente, poco più complicata ma meno eccentrica,  $\mathfrak{s} = \{s_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ , si ottiene ponendo:

$$\begin{cases} s_1 = p_2, \\ s_2 = p_3, \\ \quad \quad \quad \text{e per } i > 2, \\ s_i = \begin{cases} p_i + 2, & \text{se } p_i = 6h - 1, \\ p_i + 4, & \text{se } p_i = 6k + 1. \end{cases} \end{cases}$$

In questa successione compaiono “*in equal misura*” dispari della forma  $6j \mp 1$ ; vi sono inoltre infiniti numeri composti<sup>6</sup>, nessuno dei quali divisibile per 3. Anche in questo caso, il grafico della funzione correlata  $g_\mathfrak{s}(n)$  in  $[3, N]$ , con  $N$  sufficientemente grande, figura come una cometa apparentemente indistinguibile da quella di Goldbach.

b) La successione  $\mathfrak{t} = \{t_h\}_{h \in \mathbb{N}}$ , dove, posto  $a_h = (h+1) \lg(h+1)$ ,

$$t_h = \begin{cases} \lfloor a_{h+1} \rfloor & , \quad \text{se } \lfloor a_{h+1} \rfloor \text{ è dispari,} \\ \lfloor a_{h+1} \rfloor + 1 & , \quad \text{altrimenti;} \end{cases}$$

<sup>6</sup>Questa affermazione segue facilmente dal fatto che  $\pi_{6,5}(x) \sim x/2 \lg x$ , per  $x \rightarrow \infty$  e dal teorema di Brun: “*se  $\pi_2(x)$  indica il numero delle coppie  $(p, p+2)$  di primi gemelli con  $p+2 \leq x$ , vi è un intero  $n_0$ , effettivamente computabile, tale che per  $x > n_0$ , è  $\pi_2(x) < 100x/(\lg x)^2$ ” [1].*



trae la propria origine dalla *formula asintotica dell'ennesimo primo*<sup>7</sup>:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p_n}{n \lg n} = 1.$$

Vi sono buoni motivi per credere che la successione  $\mathfrak{t}$  soddisfi l'analogo della congettura di Goldbach e che  $g_t(n) > 0$  per ogni  $n > 2$ . Il grafico della  $g_t(n)$  nel solito

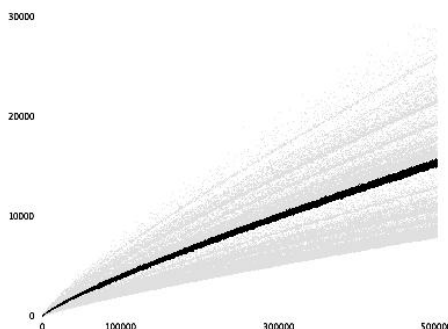


FIGURA 8. Grafico di  $g_t(n)$ , per  $n \in [3, 500.000]$  (in grigio chiaro il grafico di  $g(n)$ ).

intervallo  $[3, 500.000]$  (fig. 8), benché di notevole “spessore,” non sembra certo una cometa, ma si va a piazzare proprio nel giusto mezzo fra le due zone principali della cometa di Goldbach.

Si potrebbe eccepire che gli elementi della successione  $\mathfrak{t}$  sono, fra i naturali, più “frequenti” dei numeri primi, nel senso che  $\pi_t(x) > \pi(x)$ , per<sup>8</sup>  $x \geq 115$ . Effettivamente è noto che  $n \lg n \leq p_n$ , per  $n \geq 2$ ; ma è anche  $n \lg(n \lg n) \geq p_n$ , per  $n \geq 6$  [16]<sup>9</sup>. Così posto

$$(1) \quad y_k = (k + 1) \lg((k + 1) \lg(k + 1)),$$

e

$$u_k = \begin{cases} \lfloor y_{k+1} \rfloor, & \text{se } \lfloor y_{k+1} \rfloor \text{ è dispari,} \\ \lfloor y_{k+1} \rfloor + 1, & \text{altrimenti,} \end{cases}$$

per ogni  $k \in \mathbb{N}$ , si ha una successione di interi dispari  $\mathfrak{u} = \{u_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ , monotona crescente, con  $\pi_{\mathfrak{u}}(x) < \pi(x)$  per  $x \geq 2$ , che, sebbene presenti una funzione correlata  $g_{\mathfrak{u}}(n)$  con valori decisamente modesti rispetto alla  $g_t(n)$  dell'esempio precedente, sembra comunque avere sufficienti possibilità di verificare l'analogo della congettura di Goldbach (fig. 9). Vale la pena di notare che è  $g_{\mathfrak{u}}(2l) = 0$ , per  $2 \leq l \leq 10$  e pertanto  $m_{\mathfrak{u}} = 20$ .

c) Mediante la stessa successione (di numeri reali)  $\{y_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  definita sopra dalla (1),

<sup>7</sup>Questo risultato è un enunciato equivalente al già citato “teorema dei numeri primi”.

<sup>8</sup>Tuttavia una “frequenza” elevata non basta ad assicurare la validità dell'analogo della congettura di Goldbach; la successione dei naturali congrui a 3 modulo 4 ne è un esempio molto semplice e significativo.

<sup>9</sup>Ovviamente  $p_n \sim n \lg(n \lg n)$ , per  $n \rightarrow \infty$ .

Sull'ennesimo primo vi sono risultati più stringenti; vanno certamente citati: [6] e [9].

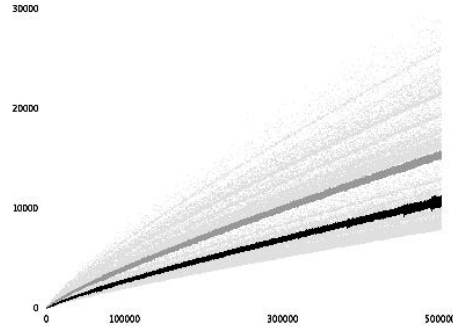


FIGURA 9. Grafico di  $g_u(n)$ , per  $n \in [3, 500.000]$  (rispettivamente, in grigio e grigio chiaro i grafici di  $g_t(n)$  e  $g(n)$ ).

è possibile mostrare come vi sia un'ampia molteplicità di successioni di numeri dispari, che pure si ritiene possano soddisfare l'analogo della congettura di Goldbach; tali sono le successioni di interi dispari  $\mathfrak{v} = \{v_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  con

$$\begin{cases} v_1 = 3 & \text{e} \\ v_k \in [y_k, y_{k+1}) & \text{per } k \geq 2, \end{cases}$$

tutte ovviamente monotone crescenti e con  $\pi_{\mathfrak{v}}(x) < \pi(x)$  per  $x \geq 2$ .

Sono state esaminate parecchie successioni di questa *famiglia*, individuate sia effettuando sistematicamente la scelta di  $v_k$  (ad esempio il massimo dispari in  $[y_k, y_{k+1})$ ), sia impiegando un generatore di numeri pseudocasuali; in generale, i grafici delle funzioni  $g_{\mathfrak{v}}(n)$  ad esse correlate, a meno di particolari minuti, rimangono assai simili al "prototipo" illustrato in figura 10.

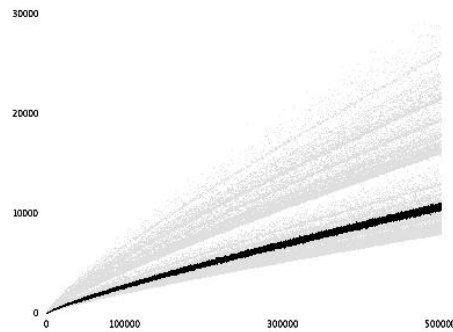


FIGURA 10. Grafico di una  $g_{\mathfrak{v}}(n)$ , per  $n \in [3, 500.000]$ .

**d)** Un'altra interessante famiglia di successioni crescenti di dispari può essere individuata mediante la funzione  $x/(\lg x - 1)$ ; si vede facilmente che per ogni  $j \in \mathbb{N}$ , l'equazione  $x/(\lg x - 1) = 7 + j$  ammette un'unica soluzione reale  $x_j > 7$ ; la successione  $\{x_j\}_{j \in \mathbb{N}}$  di tali soluzioni risulta essere crescente e così è possibile considerare

le successioni  $\mathfrak{w} = \{w_j\}_{j \in \mathbb{N}}$  i cui elementi sono interi dispari tali che

$$\begin{cases} w_1 = 3, & w_2 = 5, & w_3 = 7, & w_4 = 11 \text{ e} \\ w_{j+4} \in [x_j, x_{j+1}) & \forall j \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

È noto che  $x/(\lg x - 1) \leq \pi(x)$ , per  $x > 5393$  (cfr. [9] pp. 37-41) e risulta  $\pi_{\mathfrak{w}}(x) \leq \pi(x)$ , per  $x \geq 2$ .

I grafici delle funzioni  $g_{\mathfrak{w}}(n)$ , correlate a diverse di queste successioni (determinate con scelta sistematica oppure pseudocasuale di  $w_j$ ), non presentano diversità di rilievo dal campione illustrato in figura 11. Si può osservare che  $\pi_{\mathfrak{w}}(x) \sim x/\lg x \sim$

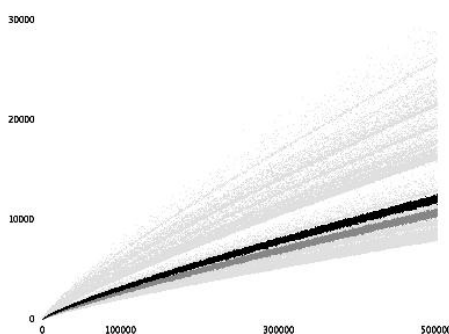


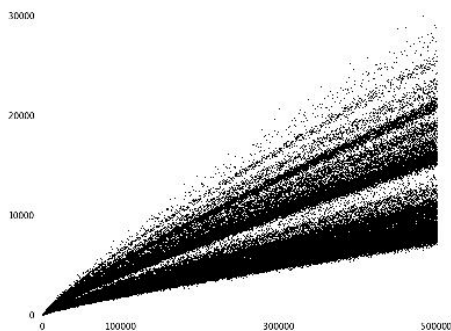
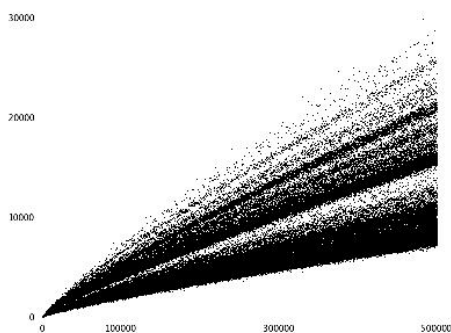
FIGURA 11. Grafico di una  $g_{\mathfrak{w}}(n)$  per  $n \in [3, 500.000]$  (in grigio scuro il grafico di una  $g_{\mathfrak{v}}(n)$ ).

$\pi_{\mathfrak{v}}(x)$ , quali che siano  $\mathfrak{w}$  e  $\mathfrak{v}$  nelle rispettive famiglie e questo vale anche per le successioni  $\mathfrak{r}$ ,  $\mathfrak{s}$ ,  $\mathfrak{t}$  e  $\mathfrak{u}$ . L'idea di introdurre successioni  $\mathfrak{c}$  di numeri naturali con  $\pi_{\mathfrak{c}}(x)$  asintoticamente equivalente a  $x/\lg x$ , cioè con una distribuzione analoga a quella dei numeri primi, sembra risalire almeno al 1937, ad opera di Harald Cramér, seppure con uno scopo diverso ([5], [11], [14]).

Qui si vuole solo porre in evidenza che a fianco alla congettura di Goldbach ve ne sono molte (infinite) altre analoghe. Francesco Lacava suggerisce che la validità di una qualsiasi di queste congetture implicherebbe la validità di tutte le altre. Sembra più verosimile che la risoluzione di qualche congettura analoga a quella di Goldbach, anche se non ne implica la risoluzione, potrebbe forse evidenziarne qualche nuova prospettiva.

#### 4. ALTRE COMETE?

Sembra che le funzioni  $g_{\mathfrak{v}}(n)$  e  $g_{\mathfrak{w}}(n)$  correlate alle successioni  $\mathfrak{v}$  e  $\mathfrak{w}$ , appartenenti alle due famiglie definite nel paragrafo precedente, abbiano tutte grafici somiglianti a “scie” piuttosto che a “comete”; è possibile fra queste successioni sceglierne qualcuna che dia luogo ad una funzione che abbia il grafico simile ad una “cometa”? La risposta è affermativa, basta preferire, nella scelta dell'elemento  $w_j$  ( $v_k$ ) di una successione  $\mathfrak{w}$  ( $\mathfrak{v}$ ) nell'intervallo  $[x_j, x_{j+1})$  ( $[y_k, y_{k+1})$ ), numeri (dispari possibilmente composti) che siano primi con  $3 \cdot 5 \cdots p_h$  ( $h \geq 5$ ). Perché così facendo gli elementi della successione  $\mathfrak{w}$  ( $\mathfrak{v}$ ) vengono distribuiti solo nelle classi prime col modulo  $2 \cdot 3 \cdots p_h$ . Le figure 12 e 13 mostrano i grafici di due funzioni  $g_{\mathfrak{w}'}(n)$  e  $g_{\mathfrak{w}''}(n)$  correlate con le successioni  $\mathfrak{w}'$  e  $\mathfrak{w}''$  determinate “preferendo” dispari primi con

FIGURA 12. Grafico di  $g_w'(n)$ , per  $n \in [6, 500.000]$ .FIGURA 13. Grafico di  $g_w''(n)$ , per  $n \in [6, 500.000]$ .

$3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19 = 4.849.845$  ( $h = 8$ ); occorre notare che nella  $w''$  è stata accentuata al massimo la prevalenza di numeri composti.

Certo queste “comete” non sono belle quanto l’originale; forse, qualcuno le direbbe “*artificiali*,” in realtà esistono.

#### BIBLIOGRAFIA

- [1] V. Brun, *Le crible d’Eratosthène et le théorème de Goldbach*, C.R. Acad. Sci. Paris, 168(1919), 544–546.
- [2] K. Brown, *Evidence for Goldbach*, Mathpages, 1994–2010, <http://www.mathpages.com/home/kmath101.htm>.
- [3] N.F. Benschop, *Additive structure of  $\mathbb{Z}(\cdot) \bmod m_k$  (square-free) and Goldbach’s Conjecture*, arXiv:math.GM/0103091v5, 2009, <http://arxiv.org/pdf/math/0103091v5>.
- [4] J.R. Chen, *On the representation of a large even integer as the sum of a prime and a product of at most two primes*, Sci. Sinica, 16(1973), 157–176.
- [5] H. Cramér, *On the order of magnitude of the difference between consecutive prime numbers*, Acta Arith., 2(1937), 23–46.
- [6] M. Cipolla, *La determinazione assintotica dell’ $n^{\text{imo}}$  numero primo*, Matematiche Napoli, 3(1902), 132–166.
- [7] L.E. Dickson, *History of the theory of numbers*, Vol. I, Dover Pub., 2005, 1919.
- [8] M. Deaconescu, *Adding units mod n*, Elem. Math., 55(2000), 123–127.

- [9] P. Dusart, *Autour de la fonction qui compte le nombre de nombres premiers*, Thèse de Doctorat, Université de Limoges, 17, 1998, <http://www.unilim.fr/laco/theses/1998/T199801.pdf>.
- [10] T. Estermann, *On Goldbach's problem: proof that almost all even positive integers are sums of two primes*, Proc. London Math. Soc., 44(2)(1938), 307–314.
- [11] A. Granville, *Harald Cramér and the distribution of prime numbers*, Scandanavian Actuarial J., 1(1995), 12–28, <http://www.dms.umontreal.ca/~andrew/PDF/cramer.pdf>.
- [12] R.K. Guy, *Unsolved problems in number theory*, Springer-Verlag, 1994.
- [13] G.H. Hardy & J.E. Littlewood, *Some problems of 'partitio numerorum' III: on the expression of a number as a sum of primes*, Acta Math., 44(1922), 1–70.
- [14] A. Languasco & A. Zaccagnini, *Intervalli fra numeri primi consecutivi*, <http://matematica-old.unibocconi.it/LangZac/home3.pdf>.
- [15] H.L. Montgomery & R.C. Vaughan, *The exceptional set in Goldbach's problem*, Acta Arith., 27(1975), 353–370.
- [16] J.B. Rosser, *Explicit bounds for some functions of prime numbers*, Amer. J. Math., 63(1941), 211–232.
- [17] P. Ribenboim, *The Little book of big primes*, Springer-Verlag, 1991.
- [18] J.J. Sylvester, *On the partition of an even number into two primes*, Proc. London Math. Soc. Ser.I, 4(1871), 4–6.
- [19] H.N. Shapiro, *Introduction to the theory of numbers*, Dover Pub., 2008, 1983.
- [20] J.W. Sander, *On the addition of units and nonunits mod  $m$* , Journal of Number Theory, 129(2009), 2260–2266.
- [21] I.M. Vinogradov, *Representation of an odd number as a sum of three primes*, Dokl. Akad. Nauk SSSR, 15(6-7)(1937), 291–294.
- [22] A. Zaccagnini, *Variazioni Goldbach: problemi con numeri primi*, L'Educazione Matematica, Anno XXI, Serie VI, 2(2000), 47–57, [http://www.math.unipr.it/~zaccagni/psfiles/papers/Goldbach\\_I.pdf](http://www.math.unipr.it/~zaccagni/psfiles/papers/Goldbach_I.pdf).