

Il moto Browniano iperbolico e altri moti su spazi iperbolici

Enzo ORSINGER

Abstract¹. In questo lavoro si presenta una breve ed elementare introduzione alla geometria del semipiano di Poincaré, \mathbb{H}_2^+ , cioè al modello più noto di geometria iperbolica. Si presentano i risultati classici riguardanti il moto Browniano iperbolico su \mathbb{H}_2^+ , estesi anche allo spazio iperbolico tridimensionale \mathbb{H}_3^+ .

Si studia la rappresentazione stocastica del moto Browniano iperbolico e si analizzano le analogie con le rappresentazioni stocastiche del processo di Bessel e del moto Browniano sulla sfera.

Infine si accenna allo studio delle equazioni frazionarie collegate con alcune estensioni del moto Browniano iperbolico.

1. ELEMENTI DI GEOMETRIA IPERBOLICA

Il moto Browniano iperbolico è definito su un modello di spazio iperbolico chiamato semipiano di Poincaré, indicato nel testo come $H_2^+ = \{(x, y) : y > 0\}$.

In H_2^+ la distanza tra due punti è misurata con la metrica

$$(1.1) \quad ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2} .$$

Due punti con distanza euclidea $dx^2 + dy^2$ possiedono distanza iperbolica crescente via via che ci si avvicina all'asse x .

L'origine di H_2^+ è il punto $(0, 1)$. I punti del semipiano di Poincaré si possono individuare mediante coordinate cartesiane (x, y) oppure mediante coordinate iperboliche (η, α) dove η è la distanza iperbolica da $(0, 1)$ misurata con la metrica (1.1) e α è un opportuno angolo che adesso definiamo.

Le linee di minima distanza geodetica in H_2^+ sono dei semicerchi con centro sull'asse x , oppure delle semirette verticali parallele all'asse y .

L'angolo α è definito come l'angolo formato dalla tangente in O alla geodetica che passa per O e per il punto (x, y) (si veda fig. 1).

¹Author's address: E. Orsinger, Università di Roma "La Sapienza", Dipartimento di Statistica, Probabilità e Statistiche Applicate, Piazzale Aldo Moro 5, 00185 Roma, Italy; e-mail: enzo.orsinger@uniroma1.it.

Keywords. Geometria iperbolica, trigonometria iperbolica, moto browniano iperbolico, integrali stocastici, equazioni frazionarie.

AMS Subject Classification. Primary: 60K40, Secondary: 53C22.

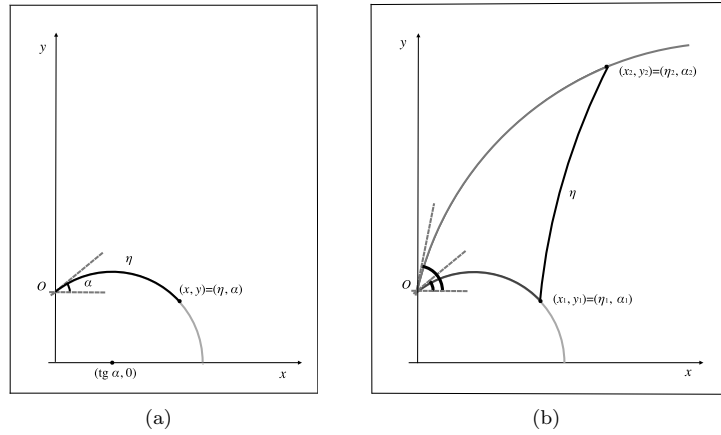


FIGURE 1. Nella figura 1(a) sono rappresentate le coordinate iperboliche. Nella figura 1(b) è rappresentato il triangolo iperbolico della formula di Carnot.

Tra le coordinate cartesiane e quelle iperboliche sussistono le relazioni:

$$(1.2) \quad \begin{cases} x = \frac{\sinh \eta \cos \alpha}{\cosh \eta - \sinh \eta \sin \alpha} , & \eta > 0 , \\ y = \frac{1}{\cosh \eta - \sinh \eta \sin \alpha} , & -\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2} . \end{cases}$$

Dalle (1.2) si può ricavare che le geodetiche passanti per O hanno equazione

$$(1.3) \quad (x - \tan \alpha)^2 + y^2 = \frac{1}{\cos^2 \alpha} .$$

L'espressione della distanza iperbolica η di un punto di H_2^+ da O è data da

$$(1.4) \quad \cosh \eta = \frac{x^2 + y^2 + 1}{2y}$$

e si può agevolmente estrarre da (1.2). Viceversa da (1.3) e (1.4) si possono ottenere le formule di trasformazione delle coordinate cartesiane a quelle iperboliche.

L'espressione della distanza iperbolica tra i punti (x_1, y_1) e (x_2, y_2) che generalizza la (1.4) è

$$(1.5) \quad \cosh \eta = \frac{(x_1 - x_2)^2 + y_1^2 + y_2^2}{2y_1 y_2} .$$

e si può ottenere combinando le formule precedenti con la formula di Carnot iperbolica data da

$$(1.6) \quad \cosh \eta = \cosh \eta_1 \cosh \eta_2 - \sinh \eta_1 \sinh \eta_2 \cos(\alpha_1 - \alpha_2) ,$$

dove (η_j, α_j) sono le coordinate iperboliche di (x_j, y_j) , $j = 1, 2$. Per $\alpha_1 = \alpha_2 = \pi/2$ si ottiene la formula di Pitagora iperbolica che, a sua volta, generalizza quella classica di Pitagora della geometria euclidea.

Per un triangolo rettangolo iperbolico tra l'ipotenusa di lunghezza η e i cateti di lunghezza η_j , $j = 1, 2$ sussiste la relazione

$$(1.7) \quad \cosh \eta = \cosh \eta_1 \cosh \eta_2$$

che è una delle formule principali della trigonometria iperbolica. Un modello alternativo a quello del semipiano di Poincaré è quello del disco di Poincaré di raggio unitario nel quale le geodetiche sono formate da archi di cerchio ortogonali alla frontiera D . La relazione tra i punti di H_2^+ e D è data dalla trasformazione conforme

$$(1.8) \quad w = \frac{iz + 1}{z + i} .$$

Un punto $(x, y) \in H_2^+$ è trasformato in un punto $(u, v) \in D$ e le relazioni tra le coordinate sono date da

$$(1.9) \quad u = \frac{2x}{x^2 + (y + 1)^2} \quad , \quad v = \frac{x^2 + y^2 - 1}{x^2 + (y + 1)^2} ,$$

e

$$(1.10) \quad x = \frac{2u}{u^2 + (1 - v)^2} \quad , \quad y = \frac{1 - (u^2 + v^2)}{u^2 + (1 - v)^2} .$$

La distanza iperbolica si conserva sotto la trasformazione (1.8).

2. MOTO BROWNIANO IPERBOLICO

Il moto Browniano iperbolico è un processo di diffusione definito sul semipiano di Poincaré H_2^+ e la cui legge di probabilità $p_H(x, y, t)$ è soluzione del problema di Cauchy

$$(2.1) \quad \begin{cases} \frac{\partial p_H}{\partial t} = \frac{1}{2} y^2 \left\{ \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right\} p_H \\ p_H(x, y, 0) = \delta(x)\delta(y - 1) . \end{cases}$$

L'equazione del calore che figura nella (2.1) può essere espressa utilizzando le coordinate iperboliche (η, α) introdotte in precedenza.

L'espressione della (2.1) diventa

$$(2.2) \quad \frac{\partial p_H}{\partial t} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{\sinh \eta} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\sinh \eta \frac{\partial}{\partial \eta} \right) + \frac{1}{\sinh^2 \eta} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} \right\} p_H .$$

La trasformazione del Laplaciano iperbolico dalle coordinate cartesiane a quelle iperboliche (e viceversa) è esposta in dettaglio in Lao e Orsingher (2007).

È possibile anche scrivere l'equazione che governa la legge di probabilità del moto Browniano iperbolico nel disco di Poincaré D che in coordinate polari (r, θ) diventa

$$(2.3) \quad \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{(1 - r^2)^2}{2^2} \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right\} p .$$

Lo studio delle distribuzione della legge di probabilità del processo descritto dalla distanza iperbolica $\eta = \eta(t)$, $t > 0$ è stato iniziato da Gertsenshtein e Vasiliev nel

1959. La sua derivazione è basata sulla soluzione del problema

$$(2.4) \quad \begin{cases} \frac{\partial p_H}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{1}{\sinh \eta} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\sinh \eta \frac{\partial}{\partial \eta} \right) p_H, & \eta, t > 0 \\ p_H(\eta, 0) = \delta(\eta). \end{cases}$$

Nell'articolo originale di Gertsenshtein e Vasiliev (1959) non appare il fattore $1/2$ e ci si può ridurre a questo caso ponendo $t' = t/2$. L'espressione esplicita della legge di probabilità è:

$$(2.5) \quad p_H(\eta, t) = \frac{e^{-t/4}}{\sqrt{\pi}(\sqrt{2t})^3} \int_{\eta}^{\infty} \frac{\phi e^{-\phi^2/4t}}{\sqrt{\cosh \eta - \cosh \phi}} d\phi$$

ed è apparsa in numerosi lavori, spesso con costanti contraddittorie e senza una esplicita derivazione dettagliata.

Si può verificare che

$$(2.6) \quad \int_0^{\infty} p_H(\eta, t) \sinh \eta d\eta = 1$$

e quindi la costante di (2.5) è quella corretta come si mostra in Comtet e Monthus (1996) e Lao e Orsingher (2007).

La forma esplicita della distribuzione della legge di probabilità ha anche suggerito alcuni studi asintotici sul suo comportamento (Simon (2002)).

La distribuzione (2.5) possiede una interessante relazione con la legge del tempo di primo passaggio del moto Browniano standard illustrata nella formula

$$(2.7) \quad \Pr\{\eta(t) > \bar{\eta}\} = 2\sqrt{2}e^{-t/4} \int_{\bar{\eta}}^{\infty} f_t(\phi) \sqrt{\cosh \phi - \cosh \bar{\eta}} d\phi$$

dove

$$(2.8) \quad f_t(\phi) = \frac{\phi e^{-\phi^2/4t}}{\sqrt{2\pi}(2t)^{3/2}}, \quad t, \phi > 0.$$

3. MOTO BROWNIANO IPERBOLICO NELLO SPAZIO H_3^+

Il moto Browniano iperbolico illustrato nella Sezione 2 è stato esteso già nel 1959 da Karpelevic, Tutubalin e Shur nello spazio $H_3^+ = \{(x, y, z), z > 0\}$. Successivamente una versione generalizzata dallo spazio iperbolico $H_n^+ = \{(x_1, x_2, \dots, x_n), x_n > 0\}$ è stata studiata da Gruet (1996). La legge di probabilità della distanza iperbolica in H_n^+ è soluzione del problema

$$(3.1) \quad \begin{cases} \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{1}{\sinh^{n-1} \eta} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\sinh^{n-1} \eta \frac{\partial}{\partial \eta} \right) p, & \eta, t > 0 \\ p(\eta, 0) = \delta(\eta). \end{cases}$$

Nel caso speciale in cui $n = 3$ la soluzione di (3.1) possiede la forma esplicita

$$(3.2) \quad p_{H_3^+}(\eta, t) = \frac{e^{-t}}{2\sqrt{\pi t^{3/2}}} \frac{\eta e^{-\eta^2/4t}}{\sinh \eta}, \quad \eta > 0.$$

Una verifica che (3.2) soddisfa l'equazione (3.1) è presentata in Orsingher e De Gregorio (2007) dove è anche provato che

$$(3.3) \quad \int_0^\infty p_{H_3^+}(\eta, t) \sinh^2 \eta \, d\eta = 1 .$$

Alcune relazioni tra la soluzione di (3.1) per differenti valori di n sono considerate in Gruet (1996).

4. RAPPRESENTAZIONE STOCASTICA DEL MOTO BROWNIANO IPERBOLICO IN H_2^+

Dalla forma del generatore del moto Browniano iperbolico in H_2^+ si vede che le coordinate $X = X(t)$, $Y = Y(t)$ del moto Browniano iperbolico soddisfano il sistema differenziale stocastico

$$(4.1) \quad \begin{cases} dX = Y dB_1, & X(0) = 0, \\ dY = Y dB_2, & Y(0) = 1, \end{cases}$$

dove B_1 e B_2 sono moti Browniani indipendenti.

È facile verificare che il sistema (4.1) possiede soluzione

$$(4.2) \quad \begin{cases} X(t) = \int_0^t e^{B_2(s)-s/2} dB_1(s), \\ Y(t) = e^{B_2(t)-t/2}. \end{cases}$$

La componente verticale del moto Browniano iperbolico è dunque un moto Browniano geometrico mentre quella orizzontale è un processo rappresentato da un integrale stocastico. Integrali stocastici della forma

$$(4.3) \quad \int_0^t e^{B_2(s)} dB_1(s)$$

sono stati esaminati da numerosi autori e il risultato principale in questo ambito è la così detta reazione di Bougerol che asserisce che

$$(4.4) \quad \int_0^t e^{B_2(s)} dB_1(s) \stackrel{i.d.}{=} \sinh B(t) .$$

Vi è una semplice dimostrazione di questo risultato dovuta a Alili, Dufresne e Yor (1997). Sfortunatamente la presenza di una deriva nel moto Browniano geometrico che figura nella prima delle (4.2) non permette una semplice rappresentazione stocastica della componente X del moto Browniano iperbolico. Utilizzando la (1.4) è possibile fornire una espressione stocastica della distanza iperbolica

$$(4.5) \quad \cosh \eta(t) = \cosh \left\{ B_2(t) - \frac{t}{2} \right\} + \frac{1}{2} e^{-B_2(t)+t/2} \left\{ \int_0^t e^{B_2(s)-s/2} dB_1(s) \right\}^2 .$$

È interessante notare che dalla (4.5) si ricava che

$$(4.6) \quad E \cosh \eta(t) = e^t ,$$

il che mostra come la distanza iperbolica media del moto Browniano iperbolico cresce col tempo. In Gruet (1996) è studiato il moto Browniano iperbolico in H_n^+

e le componenti (X_1, \dots, X_n) sono soluzioni del sistema differenziale stocastico

$$(4.7) \quad \begin{cases} dX_1 = X_n dB_1, \\ dX_2 = X_n dB_2, \\ \dots \\ dX_n = X_n dB_n + \frac{1}{2}(2-n)X_n dt, \end{cases}$$

con $X_j(0) = 0$ per $j = 1, \dots, n-1$ e $X_n(0) = 1$. La formula di Itô consente di dimostrare che la soluzione del sistema (4.7) possiede la forma

$$(4.8) \quad \begin{cases} X_j(t) = \int_0^t e^{B_n(s) + [(1-n)/2]s} dB_j, & j = 1, \dots, n-1 \\ X_n(t) = e^{B_n(t) + [(1-n)/2]t}. \end{cases}$$

Dalla forma del generatore in coordinate iperboliche del moto Browniano iperbolico (desumibile dalle (2.1)) si vede che la coppia $(\eta(t), \alpha(t))$ è soluzione del sistema stocastico

$$(4.9) \quad \begin{cases} d\eta = \frac{dt}{2 \tanh \eta} + dB_1, & \eta(0) = 0, \\ d\alpha = \frac{1}{\sinh \eta} dB_2. \end{cases}$$

La prima equazione differenziale stocastica è particolarmente interessante perchè dimostra che la deriva del processo $\eta = \eta(t)$ è massima vicino all'origine e le traiettorie del moto Browniano iperbolico vengono spinte lontano dall'origine. Ciò mostra che $\eta = \eta(t)$ svolge lo stesso ruolo del processo di Bessel $R = R(t)$ in \mathbb{R}^2 che è governato dall'equazione

$$(4.10) \quad dR = dB + \frac{dt}{2R}.$$

Le equazioni (4.9) possiedono una stretta analogia con quelle che governano il moto Browniano sulla superficie di una sfera, dove la latitudine θ e la longitudine ϕ soddisfano il sistema differenziale

$$(4.11) \quad \begin{cases} d\theta = \frac{dt}{2 \tan \theta} + dB_1, \\ d\phi = \frac{1}{\sin \theta} dB_2. \end{cases}$$

Mediante la trasformazione $\theta = i\eta$, $dt = -dt'$ si può ricondurre il sistema (4.11) al sistema (4.9). Questo mostra che il moto Browniano iperbolico è formalmente coincidente con un moto Browniano sulla superficie di una sfera di raggio immaginario.

5. ALCUNE CONSIDERAZIONI SUL MOTO BROWNIANO IPERBOLICO E LE EQUAZIONI FRAZIONARIE

L'equazione frazionaria

$$(5.1) \quad \begin{cases} \frac{\partial^\beta u}{\partial t^\beta} = \frac{y^2}{2} \left\{ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right\}, & \beta \in (0, 1] \\ u(x, y, 0) = \delta(x)\delta(y-1), \end{cases}$$

rappresenta una generalizzazione della (2.1). La sua versione in coordinate iperboliche è naturalmente

$$(5.2) \quad \frac{\partial^\beta u}{\partial t^\beta} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{\sinh \eta} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\sinh \eta \frac{\partial}{\partial \eta} \right) + \frac{1}{\sinh^2 \eta} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} \right\} u.$$

La derivata frazionaria che appare sia in (5.1) che in (5.2) va intesa nel senso di Dzerbajshan Caputo e per la funzione $f \in C^m$ diventa

$$(5.3) \quad \frac{d^\beta f}{dt^\beta} = \frac{1}{\Gamma(m-\beta)} \int_0^t \frac{f^m(s)}{(t-s)^{\beta+1-m}} ds, \quad m-1 < \beta \leq m.$$

Lo studio della distribuzione della distanza iperbolica è possibile considerando l'equazione frazionaria

$$(5.4) \quad \frac{\partial^\beta u}{\partial t^\beta} = \frac{1}{\sinh \eta} \left(\sinh \eta \frac{\partial}{\partial \eta} \right) u$$

soggetta alla condizione iniziale $u(\eta, 0) = \delta(\eta)$. La soluzione del problema (5.4) è ottenuta in Lao-Orsingher (2007) e rappresenta una generalizzazione della ormai classica distribuzione (2.5). La sua versione esplicita è data dalla espressione

$$(5.5) \quad u_\beta(\eta, t) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty x E_{\beta,1} \left(-\frac{t^\beta}{4} - x^2 t^\beta \right) dx \int_\eta^\infty \frac{\sin x\phi}{\sqrt{2 \cosh \phi - 2 \cosh \eta}} d\phi,$$

dove

$$E_{\beta,1} = \sum_{k=0}^\infty \frac{x^k}{\Gamma(\beta k + 1)},$$

$\beta > 0$, è la funzione di Mittag-Leffler. Il risultato più interessante estraibile dalla (5.5) è quello in cui $\beta = 1/2$ perchè in questo caso la (5.5) diventa

$$(5.6) \quad u_{1/2}(\eta, t) = 2 \int_0^\infty \frac{e^{-w^2/4t}}{\sqrt{2\pi 2t}} p_H(\eta, w) dw$$

e coincide con la distribuzione del processo

$$(5.7) \quad \eta_{1/2}(t) = \eta(|B(t)|),$$

dove η è il processo descritto dalla distanza iperbolica del moto Browniano studiata nella Sezione 2 e $B(t)$ è il classico moto Browniano di variazione infinitesimale 2 (indipendente da η). Nello spirito del lavoro Orsingher-Beghin (2004) è possibile vedere che al variare di $\beta \in (0, 1)$ si ottengono distribuzioni di probabilità di processi ottenuti per composizione di η con processi di struttura più complessa. Per $\beta = 1/2^n$ il moto Browniano che figura nella (5.5) deve essere sostituito da un moto Browniano iterato.

6. ALCUNE OSSERVAZIONI FINALI

Lo studio del moto Browniano iperbolico presentato nelle sezioni precedenti rappresenta il modello di moto aleatorio su spazi iperbolici studiato per primo e meglio conosciuto. È stato anche studiato il moto Browniano iperbolico associato ad un processo ramificato i cui si sono esaminate le proprietà qualitative più importanti Lalley e Sellke (1997). Tuttavia in questi casi la struttura geometrica dello spazio sottostante è difficilmente percepibile. Ciò invece è meglio illustrato da moti aleatori a velocità finita che si svolgono su linee geodetiche di H_2^+ o del disco di Poincaré. In questo caso un osservatore euclideo del moto riesce a percepire come la costanza della velocità iperbolica produca rallentamenti e accelerazioni a seconda che si avvicini all'asse x di H_2^+ o al bordo del disco D , oppure ci si allontani da essi. Sono stati studiati moti aleatori a velocità iperbolica costate su linee geodetiche, sia a componenti indipendenti che a componenti legate da qualche forma di dipendenza. Un ruolo fondamentale in questo studio svolgono le relazioni della trigonometria iperbolica e anche il teorema fondamentale della geometria iperbolica di Lobachevsky. È opinione del relatore che moltissimo resta da fare per studiare processi aleatori significativi in un ambiente iperbolico e la frequenza sempre maggiore di lavori che appaiono sia nelle riviste di probabilità che di fisica matematica lo mostra adeguatamente.

REFERENCES

- [1] L. Aili, D. Dufresne & M. Yor, *Sur l'identité de Bougerol pour les fonctionnelles exponentielles du mouvement brownien avec drift*, *Exponential Functionals and Principal Values Related to Brownian Motion*, Revista Matemática Iberoamericana, Madrid, (1997), 3–14.
- [2] V. Cammarota, & E. Orsingher, *Travelling randomly on the Poincaré half-plane with a Pythagorean compass*, *J. Stat. Phys.* 130(2008), 455–482.
- [3] M.E. Gertsenshtein & V.B. Vasiliev, *Waveguides with random inhomogeneities and Brownian motion in the Lobachevsky plane*, *Theory Probab. Appl.*, 3(1959), 391–398.
- [4] J.C. Gruet, *Semi-groupe du mouvement Brownien hyperbolique*, *Stochast. Stochast. Rep.*, 56(1996), 53–61.
- [5] C. Monthus & C. Texier, *Random walk on the Bethe lattice and hyperbolic Brownian motion*, *J. Phys. A: Math.*, 29(1996), 2399–2409.
- [6] F.I. Karpelevich, V.N. Tutubalin & M.C. Shur, *Limit theorems for composition of distributions in the Lobachevsky plane*, *Theory Probab. Appl.*, 3(1959), 399–401.
- [7] L.J. Lao & E. Orsingher, *Hyperbolic and fractional hyperbolic motion*, *Stochastics*, 79(2007), 505–522.
- [8] S.P. Lalley & T. Sellke, *Hyperbolic branching Brownian motion*, *Probab. Theory Related Fields*, 108(2)(1997), 171–192.
- [9] E. Orsingher & A. De Gregorio, *Random motions at finite velocity in a non-Euclidean space*, *Adv. Appl. Prob.*, 39(2007), 588–611.
- [10] T. Simon, *Concentration of the Brownian bridge on the hyperbolic plane*, *Adv. Appl. Prob.*, 30(2002), 1977–1989.